Sesión de Preparación de Olimpiada Matemática.

16 de Diciembre de 2016. Fernando Mayoral.

Desigualdades (y Polinomios y otras funciones) (I).

1.-Algunas desigualdades básicas.

1) $x^2 \geq 0$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. La igualdad sólo se cumple para $x = 0$.

2) (Desigualdad triangular) Si $x, y \in \mathbb{R}$ entonces

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

La igualdad se cumple si, y sólo si, $xy \geq 0$.

3) Medias: aritmética (A), geométrica (G), armónica (H) y cuadrática (Q): Si $a, b > 0$,

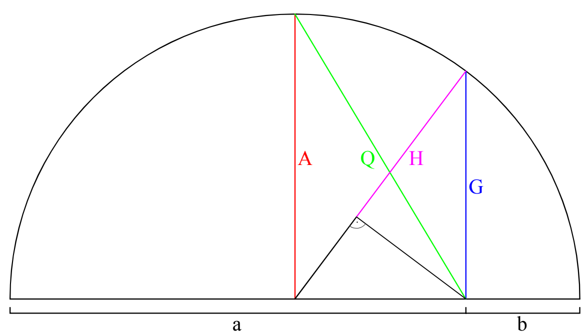
$$A(a,b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a,b) = \sqrt{ab}, \quad H(a,b) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}, \quad Q(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Entonces

$$\min\{a,b\} \leq H \leq G \leq A \leq Q \leq \max\{a,b\}$$

y las igualdades se cumplen si y sólo si $a = b$.

Las desigualdades entre las medias tienen la siguiente visualización que también cuánto se parecen y cuánto se diferencian en función de lo parecidos o diferentes que sean a y b.



Cada una de las desigualdades involucradas en $H \leq G \leq A \leq Q$ son equivalentes entre si y equivalentes a la desigualdad $(a-b)^2 \geq 0 \ \equiv \ 2ab \leq a^2 + b^2$ (y que la igualdad se cumple sólo, y exclusivamente, para $a = b$). También puede considerarse una interpretación geométrica en términos de áreas y perímetros de rectángulos.

- puesto que ab es el área de un rectágulo de lados a y b (perímetro $= 2(a+b)$) y $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$ es el área del cuadrado que tiene dicho perímetro (lado $= \frac{a+b}{2}$), la desigualdad

$$H \leq A \ \equiv \ \frac{2ab}{a+b} \leq \frac{a+b}{2} \ \equiv \ ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2,$$

nos dice que el área del rectágulo es menor o igual que la del cuadrado del mismo perímetro. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.*

- Puesto que $2(a+b)$ es el perímetro de un rectángulo de lados a y b (área $= ab$) y el perímetro del cuadrado que tiene área ab (lado $= \sqrt{ab}$) es $4\sqrt{ab}$ la desigualdad

$$G \leq A \ \equiv \ \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \ \equiv \ 4\sqrt{ab} \leq 2(a+b),$$

nos dice que el perímetro del del rectángulo es menor o igual que la cuadrado del mismo área. Y la igualdad sólo se obtiene en el caso del cuadrado $a = b$. Es decir, *de entre todos los rectángulos con un área dada, el que tiene menor perímetro es el cuadrado.*

4) (Reordenamiento) Si $a \leq b$ y $x \leq y$, entonces

$$ax + by \geq ay + bx.$$

Ejercicio 1.

a) Demuestra la desigualdad triangular y que $|x-y| \geq ||x| - |y||$ para $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demuestra la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica. Interpreta geométricamente la desigualdad en términos de áreas. ¿Cuándo se verifica la igualdad?

c) Demuestra e interpreta la desigualdad del reordenamiento.

....

a) Basta aplicar la desigualdad triangular a $x = (x-y) + y$ y a $y = (y-x) + x$.

b) Basta desarrollar $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$. Interpretación geométrica en términos de áreas: Si se considera el cuadrado de lado $a+b$, dentro de él se pueden colocar, sin que se solapen, 4 rectángulos de lados a y b. Sólo se verifica la igualdad cuando $a = b$ en cuyo caso tenemos 4 cuadrados de lado $a = b$ que cubren completamente el cuadrado de lado $a+b$.

c) La demostración es inmediata: Decir que $ax + by \geq ay + bx$ es equivalente a decir que $b(y-x) \geq a(y-x)$. Esto último es cierto puesto que $y - x \geq 0$ y $b \geq a$.

Ejercicio 2. *(Completando cuadrados)* Demuestra las siguientes desigualdades:

a) $x^2 + xy + y^2 \geq 0$.

b) $x^2 - xy + y^2 \geq 0$.

c) Si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Demuestra que la suma $x + y$ con $xy = 1, x > 0$, es mínima cuando $x = y = 1$. Interpreta geométricamente el resultado.

d) Si $0 < x < 2$ entonces $x(2-x) \leq 1$. Demuestra que el producto xy con $x + y = 2, x, y > 0$, es máximo cuando $x = y = 1$. Intepreta geométricamente el resultado.

....

a) Aunque la desigualdad se podría reducir a una desigualdad con el polinomio en una variable $p(t) = t^2 + t + 1$ lo hacemos directamente en dos variables

$$x^2 + xy + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0.$$

Obviamente la igualdad sólo se da para $x = y = 0$.

b) Se puede hacer de forma análoga al apartado anterior.

c) Puesto que $x > 0$ tanto x como $1/x$ pueden tomarse como cuadrados (de números reales),

$$x + \frac{1}{x} = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 + 2 \geq 2$$

y la igualdad slo se alcanza para $x = \frac{1}{x} = 1$.

Interpretación geométrica: De entre todos los rectángulos con área igual a 1 el que tiene menor perímetro es el cuadrado.

d) Si $0 < x < 2$ entonces

$$x(2-x) = -(x^2 - 2x) = -\left((x-1)^2 - 1\right) = 1 - (x-1)^2 \leq 1.$$

Intepretación geométrica: De entre todos los rectángulos con perímetro dado, el que tiene mayor área es el cuadrado.

Ejercicio 3. Demuestra las siguientes desigualdades:

a) Si $0 \leq x \leq y \leq 1$ entonces $0 \leq xy^2 - x^2y \leq \frac{1}{4}$.

b) Si $x, y > 0$ entonces $\sqrt{\dfrac{x^2}{y}} + \sqrt{\dfrac{y^2}{x}} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

. . . .

a) La primera desigualdad es clara, $xy^2 - x^2y = xy(y - x) \geq 0$. Para la segunda desigualdad, puesto que $0 \leq y \leq 1$ se tiene que $0 \leq y^2 \leq y$ y por tanto

$$xy^2 - x^2y \leq xy^2 - x^2y^2 = x(1-x)y^2 \leq x(1-x) = -(x^2 - x) = -\left(\left[x - \frac{1}{2}\right]^2 - \frac{1}{4}\right) \leq \frac{1}{4}.$$

b) Si $x, y > 0$, basta aplicar la desigualdad del reordenamiento con

$$(x, y) \text{ y } \left(\frac{1}{\sqrt{y}}, \frac{1}{\sqrt{x}}\right).$$

Ejercicio 4. *(OME-1984)* Dados dos números reales positivos p, q tales que $p + q = 1$, y sabiendo que todo par de números reales x, y cumple $(x - y)^2 \geq 0$, se pide demostrar

a) si $x, y > 0$, entonces $\dfrac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

b) $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq \left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2$.

c) si $p, q > 0$ y $p+q=1$, entonces $\left(p+\dfrac{1}{p}\right)^2 + \left(q+\dfrac{1}{q}\right)^2 \geq \dfrac{25}{2}$.

....

a) Medias aritmética y geométrica.

b) Medias aritmética y cuadrática.

c) Si $p+q=1$ entonces $pq \leq \frac{1}{4}$ (el máximo del producto se alcanza cuando ambos son iguales). Puesto que

$$p+\frac{1}{p}+q+\frac{1}{q} = 1+\frac{1}{pq} \geq 5$$

elevando al cuadrado y suamnado con la desigualdad $\left(p+\frac{1}{p}-q-\frac{1}{q}\right)^2 \geq 0$ se obtiene el resultado. También puede obtenerse aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

2.- La desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La desigualdad de Cauchy-Schwarz establece que para dos conjuntos de n números reales, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ y $b_1, b_2, \ldots, b_n$ se verifica que

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leq \left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_n^2\right).$$

La igualdad se cumple si y sólo si las $n-$uplas $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ son una múltiplo de la otra.

Podemos suponer que alguno de los $a_k \neq 0$. Puede demostrarse la desigualdad de Cauchy-Schwarz estudiando la gráfica del polinomio de segundo grado dado por

$$p(x) = \sum_{k=1}^{n}(a_kx+b_k)^2.$$

Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$0 \leq p(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)x^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)x + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

la gráfica/parábola $y = p(x) = Ax^2+Bx+C$ esá por encima del eje OX, o es tangente a él. Por tanto, el discriminante

$$\Delta = B^2-4AC \leq 0 \Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

El caso $B^2 = 4AC$, que se corresponde con que la parábola sea tangente a OX, es equivalente a que se verifique la igualdad en la desigualdad de Cauchy-Schwarz y se da cuando $p(x_0) = 0$ para algún $x_0 \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$b_k = -x_0 a_k,\ k = 1, \ldots, n,$$

o lo que es lo mismo $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ es un múltiplo de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Ejercicio 5. *(OME-1971)* Si $0 < p, 0 < q$ y $p + q < 1$, demostrar que $(px + qy)^2 \leq px^2 + qy^2$.

. . . .

La desigualdad puede obtenerse mediante lo siguiente

$$\frac{p^2x^2 + q^2y^2 + 2pqxy}{px^2 + qy^2} = p + q - \frac{pq(x-y)^2}{px^2 + qy^2} \leq p + q < 1$$

. . . .

Sin embargo puede obtenerse de manera más natural buscando aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$(px + qy)^2 = (x\sqrt{p}\sqrt{p} + y\sqrt{q}\sqrt{q})^2 \leq \left(x^2p + y^2q\right)(p+q) < \cdots.$$

Ejercicio 6. Demostrar que si a, b, x, y son números reales y $a, b > 0$ entonces

$$\frac{(x+y)^2}{a+b} \leq \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}.$$

. . . .

Esta desigualdad se puede reducir a la desigualdad de Cauchy-Schwarz sin más que considerar lo siguiente:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2.$$

Aplicando la desigualdad de C-S tenemos

$$(x+y)^2 = \left(\frac{x}{\sqrt{a}}\sqrt{a} + \frac{y}{\sqrt{b}}\sqrt{b}\right)^2 \leq \left[\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{b}}\right)^2\right]\left(\sqrt{a}^2 + \sqrt{b}^2\right).$$

Ejercicio 7. *(OME, 1980)* Demostrar que si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos, entonces

$$(a_1 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2.$$

¿Cuándo es válida la igualdad?

. . . .

Basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a $n-$plas apropiadas.

Ejercicio 8. Demuestra que

$$\frac{a^2}{2a^2+bc}+\frac{b^2}{2b^2+ca}+\frac{c^2}{2c^2+ab}\leq 1$$

para todos los números reales positivos a, b, c.

. . . .

Basta usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Ejercicio 9. Deducir de la desigualdad de Cauchy-Schwarz la **desigualdad entre la media aritmética y la media cuadrática**: Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son números reales positivos se verifica que

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}.$$

3.- Desigualdades entre Medias.

Ya hemos considerado antes, e interpretado, las medias de dos números reales positivos. Dados n números reales positios $a_1, a_2, \ldots, a_n$ suelen considerarse las siguientes medias:

- **Media aritmética.** $A=\dfrac{a_1+\cdots+a_n}{n}$.
- **Media geométrica.** $G=\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}$.
- **Media armónica.** $H=\dfrac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}$.
- **Media cuadrática.** $Q=\sqrt{\dfrac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

La mismas desigualdades que vimos para las medias entre dos números se tienen en el caso de n números (reales positivos):

1) $\min_k\{a_k\}\leq H\leq G\leq A\leq Q\leq \max_k\{a_k\}$,

$$\min_k\{a_k\}\leq\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_1\cdots a_n}\leq\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\leq\sqrt{\frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}}\leq\max_k\{a_k\}.$$

2) Las igualdades se cumplen si y sólo si $a_1=\cdots=a_n$.

Ejercicio 10. *(OME-1975)* Probar que si el producto de n números reales y positivos es igual a 1, su suma es mayor o igual que n.

. . . .

Se obtiene fácilmente a partir de la desigualdad entre las media aritmética y la media geométrica,

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

Ejercicio 11. *(OME-1978)* Se dan los números $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Demostrar, sin necesidad de calcular derivadas que el valor de X que hace mínima la suma

$$(X - A_1)^2 + \cdots + (X - A_n)^2$$

es precisamente la media aritmética de los números dados.

Basta completar cuadrados en el desarrollo

$$0 \leq (X - A_1)^2 + \cdots + (X - A_n)^2 = nX^2 - \left(\sum_k A_k\right) X + \sum_k A_k^2.$$

Ejercicio 12. Sean $x, y, z > 0$ tales que $x + y + z = 1$. Demuestra que $xy + yz + zx \leq \dfrac{1}{3}$. ¿Qué desigualdad se deduce sin la restricción $x + y + z = 1$?

Usar la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

4.- La desigualdad del reordenamiento.

A partir de la desigualdad del reordenamiento para dos sumandos, que ya hemos considerado, se puede justificar que si se tienen dos $n-$uplas ordenadas:

$$\begin{array}{c} a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \\ b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n \end{array}$$

entonces para cualquier permutacón/reordenación $(c_1, \ldots, c_n)$ de $(b_1, \ldots, b_n)$ se tiene que

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \geq a_1c_1 + a_2c_2 + \cdots + a_nc_n \geq a_1b_n + \cdots + a_nb_1$$

Estas desigualdades se pueden interpretar en términos coloquiales de la siguiente forma: Se tienen billetes con distintos valores $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y de cada tipo de billete se puede coger una cierta cantidad de entre cantidades prefijadas $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si consideramos los valores ordenados de los billetes y de las cantidades, ¿Cuál es la forma de obtener la mayor cantidad posible cogiendo a_1 billetes de un tipo, a_2 billetes de otro tipo, y así sucesivamente hasta agotar las cantidades? El mayor valor total posible se obtendrá tomando el mayor número posible a_n de billetes con el mayor valor posible x_n, y con lo que vaya quedando ir haciendo lo mismo. El menor valor total posible se obtendrá tomando el mayor número posible de billetes lo más pequeños posible, y continuar con el mismo esquema hasta agotar las cantidades a tomar.

Ejercicio 13.
Halla el mínimo de $\dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} + \dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x}$ para $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

....

Puesto que las parejas

$$\left(\operatorname{sen}^3 x, \cos^3 x\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{\cos x}, \frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

están ordenadas de la misma forma, es decir, para $0 < x < \frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{sen}^3 x \leq \cos^3 x \Longleftrightarrow \frac{1}{\cos x} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} x},$$

aplicando la desigualdad del reordenamiento tenemos

$$\frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos x} + \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen} x} \geq \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos^3 x}{\cos x} = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$$

Cuando $\operatorname{sen} x = \cos x$, es decir $x = 45^0$, tenemos que $\operatorname{sen} x = \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y se alcanza el valor mínimo 1.

Ejercicio 14. *(IMO-1978)*
Sean $x_1, x_2, \ldots, x_n$ números naturales distintos. Demuestra que

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

. . . .

Sea $(y_1, \ldots, y_n)$ la reordenación de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ en orden creciente. Puesto que

$$(y_1, \ldots, y_n) \text{ y } \left(\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{n^2}\right)$$

están en orden contrario, tenemos

$$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{y_1}{1^2} + \frac{y_2}{2^2} + \cdots + \frac{y_n}{n^2}.$$

Y pussto que $1 \leq y_1 < y_2 < \cdots < y_n$ son números naturales tenemos que $y_k \geq k$ para todo $k = 1, \ldots, n$.

Ejercicio 15.
Sean $a_k > 0, k = 1, \ldots, n$ y $s = a_1 + \cdots + a_n$. Probar que

$$\frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - a_n} \geq \frac{n}{n - 1}.$$

. . . .

- El caso $n = 2$ es la desigualdad $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_1} \geq 2$ que es equivalente a $2a_1a_2 \leq a_1^2 + a_2^2$ (equivalente a $(a_1 - a_2)^2 \geq 0$). El caso $n = 2$ de la desigualdad entre la media geométrica (G) y la media cuadrática (Q).

- El caso $n = 3$ es la llamada **desigualdad de Nesbitt** (UK, 1903): Si $a > 0, b > 0, c > 0$,

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + c} \geq \frac{3}{2}.$$

Veamos la demostración para $n = 2, 3, \ldots$ genérico. Puede suponerse que $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ están ordenados, de forma creciente por ejemplo (el reordenarlos no afecta a la suma considerada),

$$0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n.$$

En este caso, también tendremos

$$0 < \frac{1}{s - a_1} \leq \frac{1}{s - a_2} \leq \cdots \leq \frac{1}{s - a_n}.$$

Por la desigualdad del reordenamiento tenemos

$$\begin{aligned}
S = \frac{a_1}{s - a_1} + \frac{a_2}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_n}{s - a_n} \quad &\geq \quad \frac{a_2}{s - a_1} + \frac{a_3}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_1}{s - a_n} \\
&\geq \quad \frac{a_3}{s - a_1} + \cdots + \frac{a_1}{s - a_{n-1}} + \frac{a_2}{s - a_n} \\
&\geq \quad \cdots \\
&\geq \quad \frac{a_n}{s - a_1} + \frac{a_1}{s - a_2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{s - a_n}
\end{aligned}$$

Sumando término a término estas $n - 1$ desiguadades se obtiene $(n - 1)S \geq n$.

Ejercicio 16. Desigualdad de Chebyshev, para medias.
Sean $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ dos conjuntos de n números reales. Demuestra que si están ordenados de la misma forma (ambos en forma creciente o ambos en forma decreciente), entonces

$$\frac{a_1 b_n + \cdots + a_n b_1}{n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \cdot \frac{b_1 + \cdots + b_n}{n} \leq \frac{a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n}{n}.$$

....

Son consecuencia casi directa de las desigualdades de reordenamiento. Para obtener la segunda desigualdad basta tener en cuenta que puesto que $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ están ordenados igual se tiene

$$\begin{array}{rcl} a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n & = & a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n \\ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n & \geq & a_1 b_2 + a_2 b_3 + \cdots + a_n b_1 \\ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n & \geq & a_1 b_3 + a_2 b_4 + \cdots + a_n b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n & \geq & a_1 b_n + a_2 b_1 + \cdots + a_n b_{n-1} \end{array}$$

Sumando estas desigualdades miembro a miembro se obtiene la segunda desigualdad del enunciado. La primera puede obtenerse de forma análoga.

Ejercicio 17. Sean a, b, c números reales positivos. Probar que

$$a^a b^b c^c \geq (abc)^{\frac{a+b+c}{3}}.$$

....

La desigualdad pedida es equivalente a

$$a \ln a + b \ln b + c \ln c \geq \frac{a+b+c}{3} (\ln a + \ln b + \ln c).$$

Y ahora basta con aplicar la desiguadad de Chebyshev (odenando a, b, c se tiene el mismo orden en $\ln a, \ln b$ y $\ln c$.

5.- Funciones convexas. La desigualdad de Jensen.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es una función **convexa** en un intervalo I (finito o infinito) si: para cualesquiera $x_1 < x_2$ en $[a, b]$ se verifica que

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \leq tf(x_1) + (1-t)f(x_2) \; \forall \; 0 \leq t \leq 1.$$

En términos geométricos: la gráfica de f en I está por debajo de la recta que determina cada pareja de puntos de dicha gráfica $(x_1, f(x_1)$ y $(x_2, f(x_2)$. Se dice que f es **concava** en I si $-f$ es convexa.

La **desigualdad de Jensen** establece que si f es una función convexa en I entonces se verifica que

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \cdots + t_n f(x_n)$$

para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$ y $t_1, t_2, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que $\sum_{k=1}^n t_k = 1$.

En particular,

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + \cdots + f(x_n)}{n}$$

para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $x_1, \ldots, x_n \in [a,b]$.

Dos propiedades relativas a las funciones convexas son las siguientes:

- Si f es derivable y su derivada f' es creciente en I ($f'(x_1) \leq f'(x_2)$ para todo $x_1 < x_2$ en I), entonces f es convexa en I.
- En particular: si f es dos veces derivable en I y $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa.

Los ejemplos más simples de funciones convexas son

- Las potencias $f(x) = x^p, p \geq 1$ son convexas en $[0, \infty)$. Las potencias $g(x) = |x|^p, p \geq 1$ son convexas en $\mathbb{R}$.
- La exponencial $f(x) = e^x$ es convexa en $\mathbb{R}$.
- la función $f(x) = -\log(x)$ es convexa en $(0, \infty)$.

.

Ejercicio 18.

a) (OME-1984) Sean $x > 0, y > 0$ tales que $x + y = 1$. Demuestra que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

b) Sean $x > 0, y > 0, z > 0$ tales que $x + y + z = 1$. Demuestra que

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{y}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 \geq \frac{100}{3}.$$

....

Basta tener en cuenta que $f(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ es una función convexa y aplicar la desigualdad de Jensen.

En el caso del apartado (a), se puede obtener directamente de la siguiente forma: Si $x+y = 1$ entonces $xy \leq \frac{1}{4}$ (el máximo del producto se alcanza cuando ambos son iguales). Puesto que

$$x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 1 + \frac{1}{xy} \geq 5$$

elevando al cuadrado y sumando con la desigualdad $\left(x + \frac{1}{x} - y - \frac{1}{y}\right)^2 \geq 0$ se obtiene el resultado.

Ejercicio 19. *(India, 1995)*
Consideremos n números positivos $x_1, x_2, .., x_n$ cuya suma es 1. Probar que

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}}.$$

....

Sea $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$. Puesto que

$$f'(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}} + \frac{x}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

es creciente en $(0,1)$, f es convexa en dicho intervalo. Por la desigualdad de Jensen

$$\frac{x_1}{\sqrt{1-x_1}} + \cdots + \frac{x_n}{\sqrt{1-x_n}} \geq nf\left(\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ejercicio 20. *(China, 1989)*
Demuestra que para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$ tales que $\sum_{k=1}^n x_k = 1$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{\sqrt{1-x_k}} \geq \frac{\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k}}{\sqrt{n-1}}.$$

....

Indicación: La función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$ es convexa en $(0,1)$.

Ejercicio 21.

a) Para n números positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ demuestra la desigualdad

$$\log\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq \frac{1}{n}\log\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$$

b) Deduce, de la desigualdad anterior, la desigulddad entre las medias aritmética y geométrica de n números positivos

$$\frac{1}{n}(x_1 + \cdots + x_n) \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}.$$

....

Indicación: la función $f(x) = \log x$ es cóncava en $(0, \infty)$.

Algunas **Desigualdades relacionadas** con la Jensen son las siguientes. Todas ellas pueden obtenerse a partir de la de Jensen.

a) **Desigualdad de Young.** Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cualesquiera $x, y > 0$ se verifica que

$$x^{\frac{1}{p}} y^{\frac{1}{q}} \leq \frac{x}{p} + \frac{y}{q} \quad \equiv \quad xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

Para obtener la primera versión basta con tomar $x = e^a, y = e^b$ y aplicar que e^x es convexa en $\mathbb{R}$.

b) **Desigualdad de Hölder.** Sean $1 < p, q < \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para cualesquiera $x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ se verifica que

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

El caso $p = q = 2$ de la desigualdad de Hölder es la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

La demostración se puede reducir al caso en que todos los x_k, y_k son positivos y $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^p = \sum_{k=1}^{n} y_k^q = 1$. En este caso, aplicando la desigualdad de Young a cada sumando tenemos $x_k y_k \leq \dfrac{1}{p} x_k^p + \dfrac{1}{q} y_k^q$. Y basta sumar en k.

c) **Desigualdad de Minkowski.** Sea $1 < p < \infty$. Para cualesquiera

$$x_1, x_2, \ldots, x_n;\ y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$$

se verifica que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |x_k + y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
